

document de travail

juin 2007

41

Répartition des gains dans les partenariats
public-privé :
effets comparés des modalités d'assiette d'une
redevance de concession

Olivier Ratheaux, AFD (ratheauxo@afd.fr)



Département de la Recherche

Agence Française de Développement 5 rue Roland Barthes
Direction de la Stratégie 75012 Paris - France
Département de la Recherche www.afd.fr

Olivier Ratheaux, ingénieur civil des mines, est chef de projet au département technique des opérations de l'AFD. Le présent document s'inspire de son expérience dans le montage financier et institutionnel de projets en partenariat public – privé.

Avertissement

Les analyses et conclusions de ce document sont formulées sous la responsabilité de son auteur. Elles ne reflètent pas nécessairement le point de vue officiel de l'Agence Française de Développement ou des institutions partenaires.

Sommaire

	Résumé	5
	Introduction	6
	Première partie : quelques exemples de redevances	8
	Deuxième partie : analyse de l'impact des redevances en univers certain	10
1.	Le modèle	10
1.1	Le traitement du temps	10
1.2	L'optimisation	11
1.3	Les hypothèses d'assiette	11
2.	Hypothèse de référence : pas de redevance	11
2.1	Concurrence	11
2.2	Monopole	11
3.	Redevance forfaitaire	12
3.1	Concurrence	12
3.2	Monopole	12
4.	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	12
4.1	Concurrence	12
4.2	Monopole	12
4.3	Estimation de la perte sèche pour la collectivité due à une hausse du prix	12
5.	Redevance proportionnelle à l'activité	13
5.1	Concurrence	13
5.2	Monopole	13
6.	Redevance proportionnelle au bénéfice	13
6.1	Concurrence	13
6.2	Monopole	14
7.	Considérations pratiques	14
7.1	Concurrence imparfaite	14
7.2	Mérites des redevances proportionnelles	14
7.3	Assiette de la redevance et comportement des candidats	14
7.4	Repas complet : combinaison d'assiettes	15
8.	Conclusion de la deuxième partie	15
	Troisième partie : analyse de l'impact des redevances en univers incertain	16
9.	Un modèle à comportement prudent avec aléa sur la dépense	16
9.1	Description du modèle	16
9.2	Redevance forfaitaire	16
9.3	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	17
9.4	Redevance proportionnelle à l'activité	17
9.5	Redevance proportionnelle au bénéfice	17

9.6	Conclusion	18
10.	Un modèle de type espérance - variance avec aléa sur le prix	18
10.1	Description du modèle	18
10.2	Pas de redevance	18
10.3	Redevance forfaitaire	19
10.4	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	19
10.5	Redevance proportionnelle à l'activité	19
10.6	Redevance proportionnelle au bénéfice	19
10.7	Conclusion	20
11.	Un modèle de type espérance - variance avec aléa sur la production	20
11.1	Description du modèle	20
11.2	Redevance forfaitaire	21
11.3	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	21
11.4	Redevance proportionnelle à l'activité	21
11.5	Redevance proportionnelle au bénéfice	21
11.6	Conclusion	21
12.	Un modèle de maximisation de l'espérance de l'utilité avec aléa sur le prix	21
12.1	Description du modèle	21
12.2	Pas de redevance	22
12.3	Redevance forfaitaire	22
12.4	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	22
12.5	Redevance proportionnelle à l'activité	23
12.6	Redevance proportionnelle au bénéfice	23
12.7	Cas du monopole	23
12.8	Conclusion	24
13.	Un modèle simplifié de maximisation de l'espérance de l'utilité avec aléa sur le prix	24
13.1	Description du modèle	24
13.2	Comparaison de redevances forfaitaire et proportionnelle au chiffre d'affaires	24
13.3	Comparaison de redevances forfaitaire et proportionnelle au bénéfice	25
13.4	Comparaison de redevances proportionnelle au chiffre d'affaires et proportionnelle au bénéfice	25
13.5	Conclusion	25
14.	Un modèle avec aléa sur le prix et probabilité de ruine	26
14.1	Description du modèle	26
14.2	Redevance forfaitaire	26
14.3	Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires	26
14.4	Redevance proportionnelle à l'activité	26
14.5	Redevance proportionnelle au bénéfice	27
14.6	Conclusion	27
15.	Un modèle avec aléa sur la production et probabilité de ruine	27
16.	Conclusion de la troisième partie	27

Conclusion générale	28
----------------------------	-----------

BIBLIOGRAPHIE	29
----------------------	-----------

Résumé

Le choix d'un concessionnaire de service public ou d'ouvrage public par appel à la concurrence et la régulation du contrat de concession impliquent la détermination du mode de calcul et du niveau de la redevance de concession, que le concessionnaire verse à l'autorité concédante en rémunération du droit d'exploiter et, le cas échéant, des actifs mis à sa disposition.

Les modalités de détermination de cette redevance peuvent influencer le prix et la consistance des services, ainsi que les gains de l'autorité concédante et du concessionnaire. Elles ont donc leur importance dans la conception

d'un partenariat public-privé réussi.

Cette étude s'appuie sur plusieurs modèles microéconomiques conçus par l'auteur, qui se réfèrent aux théories économiques de la fiscalité et du risque. Elle examine l'impact des formules les plus répandues de redevance de concession sur le volume et le prix des activités concédées ainsi que sur le comportement du concessionnaire. La prise en considération de l'incertitude modifie sensiblement les conclusions qui seraient obtenues en univers certain et souligne l'importance de la réflexion préalable du concédant et du concessionnaire sur les risques et le partage de ceux-ci.

Introduction

Dans sa définition française, une concession est un contrat par lequel une autorité publique (le concédant) charge une personne (le concessionnaire) d'exécuter un ouvrage public ou d'assurer un service public à ses frais et lui permet de se rémunérer en lui confiant l'exploitation de l'ouvrage public ou l'exécution du service public, avec le droit de percevoir des redevances sur les usagers. Lorsque les services sont entièrement payés par les usagers¹, le concessionnaire a la charge complète des investissements et de l'exploitation et en supporte tous les risques.

Il est d'usage que le concessionnaire paie au concédant une redevance, dite « redevance de concession ». Le paiement d'une telle redevance peut être justifié de deux manières :

- dans l'une, la redevance est ce que le concédant demande au concessionnaire en contrepartie (i) du droit d'exploiter (ce droit sera plus ou moins élevé selon la rentabilité prévisionnelle de l'affaire et, plus particulièrement, selon le degré d'exclusivité accordé au concessionnaire) et, (ii) le cas échéant, de l'usage des actifs mis par le concédant dans la concession (terrains d'assiette de l'activité – la redevance a alors un caractère de redevance domaniale², investissements antérieurs dans le cas de reprise d'une affaire existante, dit concession *brownfield*). Remarquons que l'ensemble pourrait se résumer à la rémunération d'actifs mis à disposition du concessionnaire, puisque le cas (i) traite d'un actif incorporel et le cas (ii) d'actifs corporels ;
- dans l'autre, la redevance est simplement ce que le concessionnaire accepte de payer au concédant pour prendre l'affaire. La valeur que le concessionnaire attribue à l'affaire est la somme, actualisée sur la période de concession, des flux nets de liquidités attendus, et par conséquent ce que le concessionnaire acceptera de payer au concédant pour prendre l'affaire sera plafonné

par cette valeur de l'affaire, diminuée du retour minimal demandé sur le capital investi.

Ces deux justifications – qui reflètent respectivement le point de vue de la demande et celui de l'offre – sont complémentaires.

Les raisonnements faits pour une redevance de concession sont transposables à un « fermage » ou « redevance d'affermage », qui rémunère l'usage d'actifs mis à disposition d'un fermier³ par l'autorité publique. Selon les circonstances, on aura comme fermage un loyer fixe ou variable, ou la répercussion d'annuités d'emprunts contractés par l'autorité publique propriétaire pour financer les biens mis à disposition.

Nous considérerons une mise en concession, dans laquelle les candidats sont départagés, entre autres critères, sur la redevance de concession offerte, ou bien dans laquelle le concédant fixe un niveau ou un taux de redevance de concession. La problématique exposée s'applique aussi à la renégociation d'un contrat existant. L'étude montre, sur le cas précis d'une redevance de concession, comment les modalités de choix d'un concessionnaire, ou plus généralement d'un délégataire, de travaux ou services publics, influencent le comportement de ce délégataire au quotidien. Les enjeux sont des enjeux de partage des risques, de niveau des prix et de volume des services offerts, ainsi que de régulation du contrat. L'étude peut donc intéresser les autorités

¹ les concessions comportent souvent des contributions de l'autorité publique en nature, en numéraire ou en garantie.

² en France, la conception juridique traditionnelle de la redevance de concession est celle d'une redevance domaniale. L'approche internationale est moins restrictive.

³ à la différence d'un concessionnaire, dans un affermage l'exploitant (le fermier) prend le risque d'exploitation mais pas le risque d'investissement. Les investissements sont faits par l'autorité publique.

publiques dans leur rôle de concédant, les entreprises, les cabinets qui interviennent comme conseil dans le montage ou la régulation de contrats de gestion déléguée, et les prêteurs soucieux de la mise en place de contrats équilibrés, considérés comme facteur de réduction des risques.

Les modèles présentés dans l'étude posent des repères mais sont loin d'épuiser le sujet : d'une part, à cause des difficultés de la formalisation en ce qui concerne le traitement du temps (modèle « dynamique ») ou le cas du monopole, pourtant plus proche de la réalité des concessions que celui de la concurrence ; d'autre part, parce qu'ils n'intègrent pas l'ensemble des critères, comme par exemple l'attitude de l'opinion publique⁴ ou l'affectation du produit de la redevance. Concernant cette dernière, l'autorité publique a le choix entre considérer ce produit comme une recette de « privatisation » au sens large, devant aller au pot commun du budget global, ou affecter ce produit au développement du secteur où opère la concession. Dans cette deuxième option, il

sera plus facile de négocier un niveau de redevance élevé dans la mesure où le concessionnaire pourra en espérer des retombées dans le secteur qui amélioreront la rentabilité de son affaire. En outre, bien qu'il ne soit pas abordé dans cette étude, le choix de la ou des monnaie(s) de paiement de la redevance de concession est important. Si le concessionnaire n'a que des produits en monnaie nationale, il sera équitable d'avoir une redevance de concession libellée et payée dans cette même monnaie ; s'il a des recettes en monnaie nationale et en devises supposées fortes, le concédant sera fondé à demander un partage des versements, au titre de la redevance, dans les deux monnaies. Cette étude comprend trois parties. Dans la première, nous donnons des exemples de redevances. Nous définissons ensuite des formules type de redevance et examinons l'impact de l'assiette de la redevance sur les prix, la production et le comportement du concessionnaire en univers certain (deuxième partie), et enfin en univers incertain avec aversion au risque (troisième partie).

⁴ celle-ci est prompte à assimiler un niveau de redevance faible à un « bradage » du patrimoine public. C'est confondre le passé (le patrimoine existant) et le futur (comme nous l'avons vu plus haut, la redevance de concession est corrélée aux flux de liquidités attendus de l'exploitation).

Première partie : quelques exemples de redevances

Ces exemples sont tirés de projets de gestion déléguée d'infrastructures, où l'AFD est ou a été impliquée comme conseil des autorités et/ou comme prêteur. Les valeurs des paramètres ne sont pas données pour raison de confidentialité. Les taux les plus souvent rencontrés dans le cas de redevances proportionnelles sont typiquement de quelques pour cent, quand l'assiette est le chiffre d'affaires, et de quelques dizaines de pour cent, quand elle est le résultat. Les concessions de l'aéroport de Libreville et de l'aéroport de Conakry ont été montées sans redevance de concession. Le renouvellement de la concession de l'aéroport de Conakry en 2003 a prévu une redevance composée d'une part fixe et d'une part proportionnelle au chiffre d'affaires. La délégation de gestion des aéroports de Mauritanie prévoit que le gestionnaire délégué opère sous un régime de concessionnaire sur les deux aéroports principaux et sous un régime de mandat de gestion⁵ sur les aérodromes secondaires. Elle comporte un partage du produit des redevances aéroportuaires perçues sur les aéroports concédés, entre ces aéroports et les aérodromes sous mandat de gestion, qui bénéficient par ailleurs de subventions de l'Etat. Pratiquement, cela revient à l'internalisation d'une redevance de concession proportionnelle au chiffre d'affaires et affectée au secteur, en l'occurrence au fonctionnement des aérodromes secondaires sous gérance. Il s'agit, autrement dit, d'un mécanisme de péréquation interne, plus normé et plus transparent que les habituelles subventions croisées. La concession de l'aéroport d'Abidjan prévoit une redevance composée de :

- un « droit d'exploitation » proportionnel au chiffre d'affaires, à un taux progressif par rapport à celui-ci ;
- une dotation annuelle à un fonds de fonctionnement des aérodromes de l'intérieur, composée de deux termes : (i) un pourcentage de la marge brute d'autofinancement ; (ii) un terme réputé compenser l'incidence de

l'exonération de TVA sur les redevances aéronautiques appliquées au trafic international et égal à un pourcentage des redevances aéronautiques, très légèrement dégressif par rapport au chiffre d'affaires du concessionnaire.

En outre, un minimum de perception annuelle a été défini pour la redevance globale.

Le projet de troisième pont d'Abidjan en concession prévoyait :

- une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, payable à partir de l'année suivant la fin du remboursement des prêteurs ;
- à laquelle s'ajoutait un pourcentage des profits distribués, dépendant du taux de rentabilité interne des capitaux propres constaté sur la période allant de la signature du contrat de concession à la date considérée, le pourcentage allant croissant avec ce taux.

La concession du terminal à conteneurs du port de Douala a prévu un droit initial forfaitaire (« ticket d'entrée ») et un droit de concession annuel composé d'une redevance fixe et d'un droit d'usage proportionnel au volume de l'activité.

La concession, en 1994, du chemin de fer Côte d'Ivoire – Burkina Faso, qui, *stricto sensu*, est un affermage concessif⁶, et non une concession, a prévu une redevance annuelle composée de trois termes :

- une « redevance d'usage » proportionnelle au chiffre d'affaires (le taux étant progressif selon l'année d'application) ;

⁵ dans ce régime, l'exploitant n'a pas les risques d'investissement et d'exploitation, à la différence d'un concessionnaire.

⁶ l'affermage concessif est un régime intermédiaire entre l'affermage pur et la concession pure. Les investissements sont partagés entre l'autorité publique et l'exploitant.

- le service de la dette pour investissements souscrite par les sociétés de patrimoine ferroviaire – dette déléguée au concessionnaire ;
- une dotation à un fonds de renouvellement du matériel roulant.

La renégociation menée à l'occasion du cinquième anniversaire de cette concession a remplacé le fonds de renouvellement du matériel roulant par un fonds d'investissements ferroviaires⁷, alimenté par une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires et confié au concessionnaire sous le contrôle de l'autorité concédante.

La concession du chemin de fer camerounais, en 1999, a prévu une redevance annuelle binôme, composée d'un terme fixe et d'un terme proportionnel au chiffre d'affaires (à un taux croissant dans le temps). En 2005, une renégociation a conduit à la remplacer par une redevance forfaitaire pour 5 ans, à un niveau supérieur au terme fixe initial mais dépourvu de droit proportionnel ; après 2009, les parties devraient revenir à la redevance binôme initiale. Toutefois, une nouvelle négociation en 2007 pourrait conduire à combiner une part fixe et une part variable, cette fois proportionnelle au résultat avant impôt sur les sociétés, avec affectation du produit de la redevance au financement d'investissements dans les infrastructures ferroviaires.

La concession du chemin de fer transgabonais en 1998 prévoyait une redevance binôme avec un terme fixe et un terme proportionnel à l'excédent brut d'exploitation.

Le contrat de concession du chemin de fer Dakar – Bamako, signé en 2003, a prévu une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, avec un pourcentage croissant dans le temps. Cette redevance ne pouvait, en outre, être inférieure à un niveau plancher prédéfini et qui augmentait avec le temps. En fait, le dossier d'appel d'offres de mise en concession avait prévu une redevance fixe, à un niveau défini à l'avance par les candidats dans leur offre financière, à quoi s'ajoutait une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, à un taux fixé par le concédant. Les candidats étaient financièrement discriminés selon la valeur actuelle du flux de redevances fixes qu'il s'étaient engagés à payer ; les négociations ont conduit à transformer la redevance binôme en redevance proportionnelle avec un plancher égal à la redevance fixe offerte.

Le contrat de concession du barrage hydroélectrique de Nam Theun 2 au Laos comporte un droit de concession ini-

tial, qui a servi à l'Etat lao à financer partiellement sa part dans le capital de la société concessionnaire, et une redevance assise sur le chiffre d'affaires du concessionnaire. Le taux de cette redevance croît dans le temps.

Il serait également utile de se pencher sur la formule des affermages, puisqu'une redevance d'affermage partage avec une redevance de concession d'un projet *brownfield* la caractéristique commune de rémunérer une mise à disposition de biens pour exploiter⁸.

L'affermage de la production et de la distribution d'eau potable en milieu urbain au Sénégal, en 1996, a défini le fermage versé à une société de patrimoine comme un solde entre le prix (administré) de vente de l'eau et la rémunération du fermier convenue entre celui-ci et l'autorité affermante. Il a donc été fixé par différence. Cette disposition contraste avec la clause classique des affermages, où le prix au consommateur résulte de l'addition d'un prix pour l'exploitant et d'un prix (souvent appelé « surtaxe »⁹) rémunérant l'autorité affermante ou sa société de patrimoine ; elle ne fait appel ni à une notion de loyer des installations ni à une notion de rémunération d'un droit d'exploiter en quasi exclusivité.

L'affermage en 2005 du transport fluvial en Centrafrique, qui inclut l'exploitation portuaire, a prévu une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires du fermier, progressive avec l'activité (volume du trafic) et affectée à des dépenses d'entretien et d'investissement du secteur, à quoi s'ajoute, au-delà d'un niveau d'activité prédéfini, une dotation aux amortissements des immobilisations affermees.

⁷ rappelant les « fonds de travaux » de certains contrats d'affermage du service de l'eau.

⁸ avec cette différence que le concessionnaire aura la charge de renouveler ces biens, pas le fermier.

⁹ l'appellation est impropre car il s'agit de la rémunération d'un service rendu et non d'une taxe.

Deuxième partie : analyse de l'impact des redevances en univers certain

1. Le modèle

Les notations seront :

prix de vente	p
activité (quantité produite, fonction du prix)	$Q = Q(p)$
chiffre d'affaires	$R = pQ$
fonction de dépense hors redevance	$D = D(Q)$
redevance de concession	K
bénéfice après redevance	$B = pQ - D - K$
fonction de maximisation	MAX

1.1 Le traitement du temps

Pour laisser au raisonnement une certaine simplicité, le modèle de comportement du concessionnaire sera un modèle « statique », c'est-à-dire à une seule période, de maximisation de son bénéfice après redevance, par rapport au volume de l'activité. Un autre sujet, qui justifierait une étude spécifique, serait de bâtir un modèle de production pluriannuelle – évidemment plus réaliste mais aussi plus compliqué du fait de l'introduction de nouveaux degrés de liberté et d'arbitrages temporels – et d'examiner l'effet de différentes assiettes de redevance ; nous pallierons très partiellement cette insuffisance dans la troisième partie en prenant en compte des aléas sur les prix ou la production, ce qui permet de prendre en considération des changements dans les variables économiques.

Du fait du choix d'un modèle à une seule période, la question des mérites comparés du « ticket d'entrée » et du flux de redevances sera évacuée dans la suite de l'étude. Elle peut néanmoins être abordée qualitativement. Dans la formule du ticket d'entrée, la redevance de concession est payée *ab initio* et en une seule fois, comme un achat immédiat du droit d'exploiter et des actifs éventuellement mis à disposition, tandis que dans la formule du flux annuel de redevances, prédéfini en montant ou en taux, elle est payée au fil de l'exploitation. Les deux formules peuvent être mathématiquement équivalentes en valeur actuelle, le taux d'actualisation étant le taux d'intérêt des placements de l'autorité concédante... ou le taux d'intérêt des emprunts pour le concessionnaire,

selon le point de vue d'où l'on se place. Leur effet pratique est très différent. Dans la formule du ticket d'entrée, le besoin de trésorerie immédiat pour le concessionnaire, qui s'ajoute aux besoins de financement des investissements initiaux, peut s'avérer dissuasif pour des investisseurs. De plus, l'engagement est irrévocable et le paiement irréversible quel que soit le devenir de la concession, tandis qu'un flux de redevances n'est plus dû si la concession est résiliée et peut être renégocié en cas de bouleversement des conditions économiques. La dissuasion est d'autant plus forte que l'univers est plus incertain. Un concessionnaire aura donc toutes les raisons (gestion de la trésorerie, gestion du risque) de préférer un paiement étalé. Une autorité concédante pressée par ses besoins de trésorerie voudra privilégier des paiements immédiats. Ce serait, soit au risque de ne pas trouver de concessionnaire, soit, comme nous le montrerons dans la troisième partie en introduisant l'incertitude, au risque d'avoir de moins bonnes offres (les candidats se « couvrent » par une prime de risque) ou au détriment des consommateurs (qui supporteront un surpris ou bénéficieront de moins de services). En général, la formule du flux de redevances sera donc préférée. La formule du ticket d'entrée n'est envisageable que dans le cas de concessions hautement profitables et peu risquées. Certaines concessions combinent un ticket d'entrée modique et un flux de redevances.

Mentionnons enfin que dans un modèle à plusieurs périodes la formule du flux de redevances se déclinerait sous deux variantes : la première est une formule mathématique prédéterminée par le contrat de concession (une redevance fixe ou une redevance variable ou une combinaison de termes fixes et de termes variables, dont les paramètres d'assiette sont prédéfinis) ; la seconde est une séquence de formules applicables à différentes périodes de la concession (par exemple, un taux de partage des profits variable selon l'année d'application), ce qui ajoute un degré de liberté par rapport à la première variante.

1.2 L'optimisation

Nous caractériserons l'optimum au premier ordre et ne traiterons pas des conditions du second ordre, supposées satisfaites. Nous supposons à cet effet que la fonction de dépense satisfait aux conditions $\frac{dD}{dQ} > 0$ et $\frac{d^2D}{dQ^2} \geq 0$ (concavité) et que la fonction de demande satisfait $\frac{dQ}{dp} < 0$.

1.3 Les hypothèses d'assiette

Dans les chapitres 2 à 6¹⁰, nous croiserons quatre hypothèses d'assiette de la redevance de concession, choisies parmi les plus répandues en pratique comme cité dans la première partie :

- redevance forfaitaire (ou « fixe »)
(les variables seront affectées de l'indice 1)
- redevance proportionnelle au chiffre d'affaires
(indice 2)

- redevance proportionnelle à l'activité en volume
(indice 3)
- redevance proportionnelle au bénéfice
(indice 4)

avec deux hypothèses de marché :

- concurrence parfaite ;
- monopole non régulé¹¹.

Il y a une différence fondamentale entre la redevance forfaitaire et les autres. La redevance forfaitaire est un montant absolu fixé à l'avance indépendamment de l'activité, tandis que dans la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires ou à la production ou au profit, c'est le taux qui est fixé à l'avance et non le montant, ce qui crée une certaine adaptation entre le montant de la redevance et la production.

L'hypothèse sans redevance sera affectée de l'indice 0.

2. Hypothèse de référence : pas de redevance

Nous rappelons des résultats élémentaires de la microéconomie.

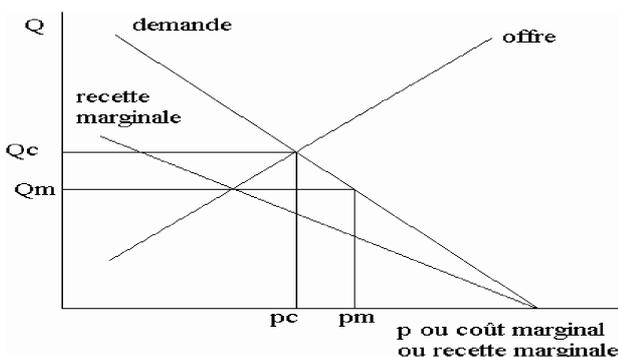
2.1 Concurrence

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = pQ - D(Q)$
où le prix est fixé par le marché, d'où $\frac{dD}{dQ} = p_0$.

C'est-à-dire : l'activité est fixée à un niveau tel que le coût marginal soit égal au prix.

2.2 Monopole

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = Qp(Q) - D(Q)$
d'où $\frac{dD}{dQ} = p(Q) + Q \frac{dp}{dQ}$.



C'est-à-dire : l'activité est fixée à un niveau tel que le coût marginal soit égal à la recette marginale $\frac{dR}{dQ}$.

D'où $p_0 = \frac{dD}{dQ} - Q \frac{dp}{dQ}$. Comme $\frac{dp}{dQ} < 0$,

$p_{\text{monopole}} > p_{\text{concurrence}}$ pour un même niveau de coût marginal, d'où $Q_{\text{monopole}} < Q_{\text{concurrence}}$.

C'est-à-dire : toutes choses égales par ailleurs, le niveau d'activité est choisi à un niveau plus faible que dans le cas de la concurrence, tandis que le prix est plus élevé. C'est « l'effet malthusien » du monopole.

¹⁰ ces chapitres adaptent des résultats classiques en microéconomie de la fiscalité au cas d'une redevance de concession. Voir par exemple J. M. Henderson et R. E. Quandt, Microéconomie (Dunod éd.). En effet, du seul point de vue du comportement de l'entreprise, une redevance de concession est assimilable à un impôt.

¹¹ le cas du monopole régulé, fréquent dans les concessions, se ramènerait au cas de concurrence, si (hypothèse la plus logique) le contrôle de l'autorité publique sur la production ou le prix vise à rapprocher le comportement de l'opérateur du type idéal de la concurrence parfaite.

3. Redevance forfaitaire

3.1 Concurrence

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = pQ - D(Q) - K_1$, où p est le prix fixé par le marché et K_1 la redevance fixe, d'où $\frac{dD}{dQ} = p_1$. Il y a encore égalité du coût marginal au prix.

$p_1 = p_0$ et de même $Q_1 = Q_0$.

C'est-à-dire : la redevance forfaitaire ne modifie ni le prix, fixé ici par le marché, ni le niveau d'activité. Elle s'impute entièrement sur le profit.

3.2 Monopole

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = Qp(Q) - D(Q) - K_1$, d'où $\frac{dD}{dQ} = p_1 + Q \frac{dp}{dQ}$.

$p_1 = p_0$ et de même $Q_1 = Q_0$.

C'est-à-dire : comme en concurrence parfaite, la redevance forfaitaire ne modifie ni le prix ni le niveau d'activité. Elle s'impute entièrement sur le profit.

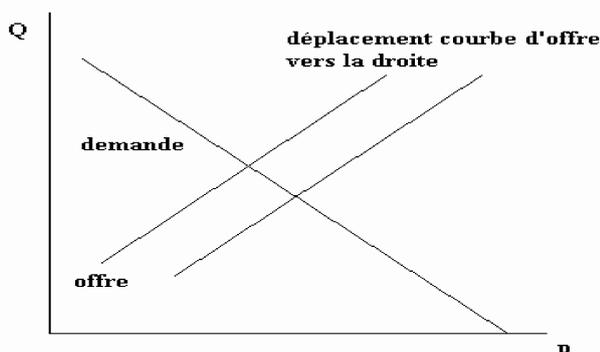
4. Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

4.1 Concurrence

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = pQ(1-a) - D(Q)$, où le prix est fixé par le marché et $K_2 = apQ$ est la redevance proportionnelle à la recette ($0 < a < 1$),

d'où $\frac{dD}{dQ} = p(1-a) < p$.

Pour un prix de marché p , l'activité offerte est réduite ($Q_2 < Q_0$), puisque c'est celle qui égale le coût marginal non plus à p mais à $p(1-a)$ et que le coût marginal croît avec l'activité. Il n'y a que dans le cas d'un coût marginal constant à tout niveau d'activité que la redevance serait sans effet sur la production. Si la redevance s'applique, non plus seulement à une entreprise qui travaille à prix fixé par le marché, mais à toutes les entreprises de la branche, en concurrence sur ce marché, elle a pour effet à la fois de réduire l'activité et d'accroître le prix, car la courbe d'offre en fonction du prix est décalée vers la droite et par conséquent $p_2 > p_0$ (le prix s'établit à l'intersection de la courbe d'offre avec la courbe de demande qui est décroissante). De même, dans le cas d'une entreprise en concurrence imparfaite, la quantité baisse et le prix monte.



En résumé, la redevance a un effet négatif sur l'activité (elle la réduit) et éventuellement sur le prix (elle le fait monter si la redevance s'applique à toutes les entreprises en concurrence).

4.2 Monopole

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = (1-a)Qp(Q) - D(Q)$, d'où $\frac{dD}{dQ} = (p(Q) + Q \frac{dp}{dQ})(1-a)$.

En prenant la différentielle totale de l'expression précédente

$$\text{en } Q \text{ et } a, \text{ nous obtenons : } \frac{dQ}{da} = \frac{\frac{dR}{dQ}}{(1-a) \frac{d^2R}{dQ^2} - \frac{d^2D}{dQ^2}}$$

Le numérateur est positif du fait de la condition du premier ordre $(1-a) \frac{dR}{dQ} = \frac{dD}{dQ} > 0$, et le dénominateur négatif si la condition du second ordre est satisfaite. D'où $\frac{dQ}{da} < 0$.

D'où aussi $Q_2 < Q_0$ (car le cas d'indice 0 correspond à $a = 0$), même quand le coût marginal est constant, et $p_2 > p_0$.

C'est-à-dire : comme en concurrence parfaite, la redevance a un effet négatif sur l'activité (elle la réduit) et le prix (elle le fait monter).

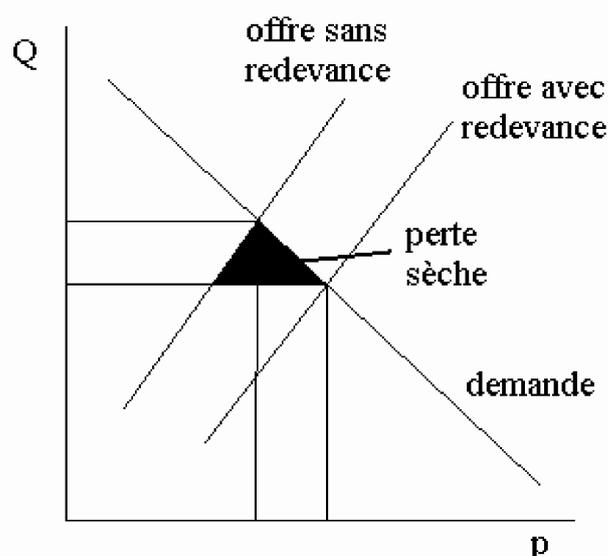
4.3 Estimation de la perte sèche pour la collectivité due à une hausse du prix

Nous venons de voir que la redevance proportionnelle

contribue à accroître le prix de vente. Pour de faibles variations, la perte sèche pour la collectivité nationale¹², représentée par le triangle sombre sur le graphique, vaut approximativement $dQdp/2$ où dQ est la variation de la quantité et dp celle du prix. Si $e = p dQ/Q dp$ désigne l'élasticité de la demande au prix, la perte sèche rapportée au

chiffre d'affaires (pQ) vaut $\frac{e}{2} \left(\frac{dp}{p} \right)^2$. Supposant une

élasticité forte de -2 (par exemple, un chemin de fer où l'élasticité de la demande de transport au prix est élevée, s'agissant de marchandises de faible valeur pour lesquelles le coût de transport est déterminant) et $dp/p = 10\%$, la perte sèche atteint 1 % du chiffre d'affaires, ce qui reste faible.



5. Redevance proportionnelle à l'activité

5.1 Concurrence

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = pQ - D(Q) - bQ$, où p est le prix fixé par le marché et $K_3 = bQ$ est la redevance proportionnelle au volume de l'activité ($0 < b < 1$), d'où $\frac{dB}{dQ} = p - b < p$.

C'est-à-dire : comme dans le cas de la redevance proportionnelle à la recette (§ 4.1), l'offre est réduite ($Q_3 < Q_0$), sauf si le coût marginal reste constant avec l'activité. En outre, si la redevance s'applique à toutes les entreprises de la branche en concurrence, $p_3 > p_0$. La redevance a un effet négatif sur l'activité (elle la réduit) et éventuellement sur le prix (elle peut le faire monter).

6. Redevance proportionnelle au bénéfice

6.1 Concurrence

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = (pQ - D(Q))(1 - c)$, où le prix est fixé par le marché et $K_4 = c(pQ - D(Q))$ est la redevance proportionnelle au bénéfice¹³ ($0 < c < 1$), d'où $\frac{dB}{dQ} = p$ puisque $1 - c \neq 0$.

Nous retrouvons la même conclusion que s'il n'y a pas de redevance : $p_4 = p_0$ et $Q_4 = Q_0$.

C'est-à-dire : la redevance proportionnelle au bénéfice ne

5.2 Monopole

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = Q(p(Q) - b) - D(Q)$, d'où $\frac{dB}{dQ} = p(Q) + Q \frac{dp}{dQ} - b$.

En différenciant totalement en Q et b , nous obtenons $\frac{dQ}{db} < 0$ (cf. § 4.2), d'où $Q_3 < Q_0$ et par conséquent $p_3 > p_0$.

C'est-à-dire : comme en concurrence parfaite, la redevance a un effet négatif sur l'activité (elle la réduit) et le prix (elle le fait monter).

modifie ni le prix, fixé ici par le marché, ni le niveau d'activité. Elle s'impute entièrement sur le profit.

Nous avons noté en introduction que la redevance de concession, considérée comme ce que le candidat à la concession est prêt à payer pour en disposer, est étroitement liée aux flux nets de liquidités que la concession produira. Cette

¹² parfois appelée « perte de rendement social ».

¹³ la redevance étant une charge d'exploitation, son assiette est logiquement le bénéfice avant l'impôt sur les sociétés.

remarque donne un fondement théorique solide à l'assise de la redevance de concession sur un solde de gestion comme l'excédent brut d'exploitation ou sur le résultat net.

6.2 Monopole

Le niveau d'activité est choisi tel que : $\text{MAX } B(Q) = (Qp(Q))$

$$- D(Q)(1 - c) \text{ d'où } \frac{dD}{dQ} = p_4 + Q \frac{dp}{dQ} \text{ puisque } 1 - c \neq 0.$$

$p_4 = p_0$ et de même $Q_4 = Q_0$.

C'est-à-dire : comme en concurrence parfaite, la redevance proportionnelle au bénéfice ne modifie ni le prix ni le niveau d'activité. Elle s'impute entièrement sur le profit.

7. Considérations pratiques

7.1 Concurrence imparfaite

La réalité est intermédiaire entre le monopole et la concurrence parfaite. Toutefois les conclusions sont inchangées en concurrence imparfaite, dans la mesure où l'effet d'une redevance de type donné est qualitativement le même pour le monopole et pour une entreprise en concurrence parfaite.

7.2 Mérites des redevances proportionnelles

La redevance proportionnelle au volume d'activité manque d'attrait par rapport à la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, qui a une signification économique beaucoup plus évidente (assiette en valeur et non en quantité) et réalise une sorte d'indexation.

La redevance proportionnelle au chiffre d'affaires bénéficie d'une très large assiette, difficilement contestable ou dissimulable et moins instable que la redevance sur le bénéfice. Cela explique son succès auprès de beaucoup d'autorités concédantes.

À la différence des redevances passées en charges d'exploitation (forfait, redevance proportionnelle à l'activité ou au chiffre d'affaires), la redevance sur le bénéfice peut donner lieu à une évasion à la mesure des possibilités de dissimulation comptable du bénéfice : utilisation de provisions, d'amortissements accélérés, de prix de transfert¹⁴, etc. En outre, le concédant ne perçoit pas de redevance en cas de perte, alors qu'il continue de percevoir dans les autres formules. Plus généralement, le produit d'une redevance assise sur le bénéfice a une variabilité plus grande que celui d'une redevance assise sur l'activité ou le chiffre d'affaires. Le risque de dissimulation comptable et la variabilité seront réduits en asseyant la redevance sur un solde caractéristique de gestion plus large que le résultat net, par exemple l'excédent brut d'exploitation ou la marge brute d'autofinancement.

7.3 Assiette de la redevance et comportement des candidats

Nous supposons ici que des candidats à une concession sont financièrement départagés sur le critère de la redevance offerte maximale : le lauréat est celui qui offre le flux actualisé de redevances le plus élevé.

Dans le cas de la redevance forfaitaire, le candidat s'engage sur un montant absolu. Le concédant et le concessionnaire savent à l'avance le montant du versement, qui sera conforme à l'annonce. Par référence à l'achat d'une entreprise ou au versement d'une redevance de concession en bloc comme « ticket d'entrée », la formule de la redevance forfaitaire est, parmi les formules de redevance payable annuellement, la seule qui implique un engagement véritable, prédéterminé, du concessionnaire. Les autres formules sont des engagements de taux sur des montants aléatoires.

Dans le cas de la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, à l'activité ou au résultat, le concédant a l'option de juger les candidats, soit sur le taux, soit sur le montant absolu offert :

- dans le premier cas, le concédant sait précisément ce qu'il mesure, mais il se prive de l'opportunité de choisir un candidat qui, à la fois offre un taux élevé, et qui, par la qualité de sa gestion, réaliserait la valeur maximale de l'assiette, donc il se prive de l'opportunité de se garantir le rendement le plus élevé de la redevance ;
- dans le second cas, les candidats seraient incités à gonfler les prévisions financières, plus particulièrement le montant de la variable d'assiette, ce qui, à rendement

¹⁴ tels que : achats à une société du groupe, facturations d'assistance technique.

annoncé à l'avance, leur permet de réduire le taux qui constitue leur réel engagement. Pour éviter cet effet pervers, il serait alors nécessaire que les candidats formulent leurs prévisions financières hors redevance avant de connaître le mode de calcul de la redevance et ne soient pas autorisés à revenir sur ces prévisions une fois l'assiette de la redevance publiée par le concédant. Cette condition est nécessaire, mais n'est pas suffisante. En effet, l'incitation à gonfler les prévisions financières subsiste, même si le candidat ignore l'assiette de la redevance, dès lors qu'il sait que la redevance sera, en tout ou partie, proportionnelle à des variables d'activité ou de produits.

En conclusion, il est recommandable de juger sur le taux de la redevance (premier cas).

7.4 Repas complet : combinaison d'assiettes

Il est possible de chercher à tirer le meilleur de chaque formule, en retenant une redevance binôme de type forfait +

pourcentage du bénéfice ou, mieux, de l'excédent brut d'exploitation, ou forfait + pourcentage de la recette, voire trinôme. Dans une redevance binôme, le terme fixe pourrait être interprété comme rémunérant un droit d'accès à l'exploitation et le terme proportionnel comme rémunérant le droit d'exploiter et/ou l'usage plus ou moins intensif d'installations. L'approche la plus évidente est de fixer le forfait et de départager les candidats sur le taux offert pour la partie proportionnelle de la redevance. Une méthode plus judicieuse en termes de réalité de l'engagement financier, bien qu'elle puisse, considérée *ex post*, revenir à un choix sur des montants plus faibles en valeur absolue, est de fixer le taux de la partie variable et de départager les candidats sur le forfait offert.

Il est possible aussi de bâtir un barème à tranches sur le forfait ou sur les pourcentages, avec progressivité, ou de prévoir la montée en puissance du barème dans le temps, avec une redevance minorée les premières années de concession ; l'effet de tels barèmes appellerait une étude séparée.

8. Conclusion de la deuxième partie

En univers certain :

1. Une redevance de concession assise sur l'activité ou sur le chiffre d'affaires a des effets négatifs sur les prix et l'activité, car elle est, en tout ou partie, transférée aux clients. Cependant, la perte sèche induite pour l'économie est probablement modique. Sa prévisibilité pour le concédant est faible.
2. Une redevance de concession assise sur le profit a de bonnes justifications théoriques et n'a pas d'effets négatifs sur les prix et l'activité, mais sa perception peut être biaisée grâce à des procédés comptables, et les rentrées peuvent être très irrégulières et difficilement prévisibles. Ces deux inconvénients peuvent être réduits en prenant comme assiette une création de liquidités plus large, comme l'excédent brut d'exploitation.
3. Une redevance de concession forfaitaire n'a pas d'effets négatifs sur les prix et l'activité et elle assure au concédant un flux régulier de recettes. Elle n'a pas d'effet pervers sur les annonces financières des candidats à la concession, et sa prévisibilité pour le concédant est totale. Cette formule est donc préconisée en univers certain¹⁵.
4. Une redevance binôme (par exemple, forfait + proportionnel à l'excédent brut d'exploitation) est un bon compromis entre les formules précédentes.

¹⁵ malheureusement, la prise en compte de l'incertitude (troisième partie) conduira généralement à une conclusion opposée.

Troisième partie : analyse de l'impact des redevances en univers incertain

Nous nous plaçons maintenant en univers incertain : plusieurs « états de la nature¹⁶ » peuvent apparaître de manière aléatoire. Nous supposons que le concessionnaire (i) éprouve de l'aversion vis-à-vis du risque et (ii) ne peut pas se couvrir en transférant le risque à un tiers.

Nous considérerons :

- un modèle à seuil de profit avec aléa sur la fonction de dépense (chapitre 9) ;
- des modèles de type « espérance - variance » avec

aléas sur le prix de vente (chapitre 10) ou sur la production (chapitre 11) ;

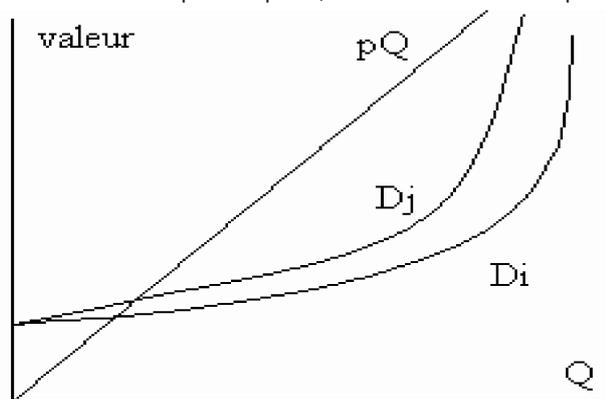
- des modèles de type « espérance de l'utilité » avec aléa sur le prix de vente (chapitres 12 et 13) ;
- enfin des modèles à probabilité de ruine (chapitres 14 et 15).

Les assiettes de redevance considérées sont les mêmes que dans les deux premières parties : forfait, chiffre d'affaires, volume de l'activité, bénéfice.

9. Un modèle à comportement prudent avec aléa sur la dépense

9.1 Description du modèle

Il y a seulement deux états de la nature, repérés par les indices i et j , dans lesquels le prix p , fixé par le marché, est identique. Le cas du monopole ne sera pas abordé. La courbe de dépense en fonction de la production, $D(Q)$, varie selon l'état de la nature. Nous supposons que la dépense dans l'état j est toujours supérieure à celle dans l'état i : $D_j(Q) \geq D_i(Q), \forall Q$. Pour la commodité du calcul, nous prenons une fonction de dépense concave $D = kQ^2 + F$, avec $0 < k_i < k_j$ et $F_i = F_j = F > 0$. Le concessionnaire est supposé ne pas raisonner en termes d'espérance mathématique de profit, mais en termes de profit



minimum à garantir : l'hypothèse sur son comportement est qu'il ne s'engagera dans l'affaire que s'il fait, quel que soit l'état de la nature, un bénéfice après redevance supérieur ou égal à un seuil \bar{B} qu'il s'est fixé, indépendamment du type de redevance. Le candidat est choisi sur le critère de la redevance offerte maximale. Nous comparons les redevances qu'il offre selon le type d'assiette.

9.2 Redevance forfaitaire

Le candidat serait prêt à offrir la redevance $K_{i1} = pQ_{i1} - D_i(Q_{i1}) - \bar{B}$ dans l'état i et $K_{j1} = pQ_{j1} - D_j(Q_{j1}) - \bar{B}$ dans l'état j . Comme la redevance est fixe, il offrira en fait la plus petite des deux : $\min(K_{i1}, K_{j1})$, de façon à ne jamais faire un bénéfice inférieur au seuil. La production choisie dans chaque état de la nature est celle qui maximise le bénéfice après redevance. La condition de maximisation au premier ordre avec la fonction de dépense $D = kQ^2 + F$ conduit à $Q_{i1} = \frac{p}{2k_i}$ dans l'état i . De même, dans l'état j , il choisit le niveau de production $Q_{j1} = \frac{p}{2k_j}$.

¹⁶ l'expression désigne l'environnement où opère le concessionnaire.

Comme $k_i < k_j$, $Q_{j1} < Q_{i1}$. La redevance est fixée à $K_1 = \min$

$$\left(\frac{p^2}{4k_i} - F - \bar{B}, \frac{p^2}{4k_j} - F - \bar{B} \right) = \frac{p^2}{4k_j} - F - \bar{B} \quad (\text{nous}$$

supposons cette expression positive). Les redevances offertes avec les autres assiettes seront comparées à cette redevance forfaitaire.

9.3 Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

La maximisation du bénéfice après redevance dans chaque état de la nature conduit (cf. § 4.1) à fixer la production à

$$Q = \frac{p(1-a)}{2k}. \quad \text{Tous calculs faits, le bénéfice après redevance est } \frac{p^2(1-a)^2}{4k} - F. \quad \text{Le bénéfice le plus bas est celui obtenu dans l'état } j, \text{ c'est celui rendu égal à } \bar{B},$$

ce qui détermine le taux offert pour la redevance :

$$a = 1 - \frac{2\sqrt{k_j(\bar{B} + F)}}{p}.$$

Le montant offert de redevance est $K_{i2} = apQ_{i2} = \frac{ap^2(1-a)}{2k_i}$ dans l'état i (nous pouvons remplacer dans cette expression (a) par sa valeur portée ci-dessus) et

$$K_{j2} = \frac{ap^2(1-a)}{2k_j} < K_{i2} \text{ dans l'état } j.$$

Comparons K_{j2} et $K_1 = K_{j1}$. Tous calculs faits, $K_{j2} - K_1 = -\frac{a^2 p^2}{4k_j} < 0$

Comparons K_{i2} et $K_1 = K_{i1}$. Tous calculs faits, $K_{i2} - K_1 = \frac{ap^2}{4k_i} \left[(1-a) \left(2\frac{k_j}{k_i} - 1 \right) - 1 \right]$ La différence entre les

redevances a le signe de l'expression entre crochets. Etudions le signe de cette expression, étant rappelé que $\frac{k_j}{k_i} > 1$:

- si $a=0,1$, l'expression est à peu près nulle pour $\frac{k_j}{k_i} = 1,05$ et positive pour $\frac{k_j}{k_i} > 1,05$;
- si $a>0,1$, par exemple $a=0,2$, l'expression est à peu près nulle pour $\frac{k_j}{k_i} = 1,1$ et positive pour $\frac{k_j}{k_i} > 1,1$.

En général, le taux de redevance sur le chiffre d'affaires ne dépasse guère 10% de sorte que, sauf si k_j et k_i sont très proches, l'expression est positive.

En conclusion, la redevance forfaitaire est supérieure à la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires versée dans le cas le plus défavorable de coût total de production (cas « j »), tandis qu'elle est généralement inférieure à la redevance proportionnelle versée dans le cas de fonction de dépense la plus faible : $K_{j2} < K_1 < K_{i2}$.

9.4 Redevance proportionnelle à l'activité

La maximisation du bénéfice après redevance dans chaque état de la nature conduit (cf. § 5.1) à une production

$$Q_3 = \frac{p-b}{2k}, \quad \text{d'où } B_3 = \frac{(p-b)^2}{4k} - F, \quad \text{d'où en égalisant}$$

$$B_3 \text{ à } \bar{B} : \bar{B} + F = \frac{(p-b)^2}{4k}, \quad \text{ce qui détermine } b.$$

La redevance offerte est alors (dans le cas i ou dans le cas j) : $K_3 = \frac{b(p-b)}{2k}$.

Comparons cette redevance à la redevance forfaitaire.

$$\text{Tous calculs faits, } K_{j3} - K_1 = -\frac{b^2}{4k_j} < 0.$$

$$\text{Tous calculs faits, } K_{i3} - K_1 = \frac{b}{4pk_j} \left[\left(1 - \frac{b}{p} \right) \left(2\frac{k_j}{k_i} - 1 \right) - 1 \right].$$

La différence a le signe de l'expression entre crochets,

étant rappelé que $\frac{k_j}{k_i} > 1$. En général $\frac{b}{p}$ sera petit

devant 1 (par exemple 10%), de sorte que la différence sera positive.

D'où la conclusion : la redevance forfaitaire est supérieure à la redevance proportionnelle au volume de l'activité, versée dans le cas le plus défavorable de coût total de production (cas « j »), mais elle est généralement inférieure à la redevance proportionnelle versée dans le cas de fonction de dépense la plus faible : $K_{j3} < K_1 < K_{i3}$.

9.5 Redevance proportionnelle au bénéfice

La maximisation du bénéfice après redevance dans chaque état de la nature conduit (cf. § 6.1) à une production

$$Q_4 = \frac{p}{2k}, \text{ d'où un bénéfice après redevance } (1-c)\left(\frac{p^2}{4k} - F\right)$$

Nous supposons que ce bénéfice n'est négatif dans aucun des états. Nous choisissons (c) tel que le plus petit de ces bénéfices, qui est celui dans l'état j, égale \bar{B} ,

$$\text{d'où } c = 1 - \frac{\bar{B}}{\frac{p^2}{4k_j} - F}.$$

La redevance versée selon l'état de la nature est $K_4 = c\left(\frac{p^2}{4k} - F\right)$.

Nous avons $K_{j4} < K_{i4}$. En remplaçant (c) par sa valeur, nous trouvons $K_{j4} = K_{j1} = K_1$. Donc $\forall i, j, K_4 \geq K_1$.

En conclusion, la redevance proportionnelle au bénéfice rapporte au concédant plus que la redevance forfaitaire - si

chaque état de la nature est bénéficiaire pour le concessionnaire.

9.6 Conclusion

Ce modèle illustre l'interaction entre niveau de production, assiette de la redevance et annonce faite par le concessionnaire. Selon les paramètres et pour l'ensemble des états de la nature, la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires ou à l'activité peut rapporter au concédant plus ou moins que la redevance forfaitaire, mais dans l'état le plus défavorable pour le concessionnaire (courbe de dépense la plus haute) elle rapporte toujours moins. La redevance proportionnelle au résultat rapporte au moins autant, dans l'état le plus défavorable, que la redevance forfaitaire, et davantage pour l'ensemble des états, si toutefois chaque état est bénéficiaire.

10. Un modèle de type espérance - variance avec aléa sur le prix

10.1 Description du modèle

Nous considérons une entreprise qui subit le prix du marché. Le cas du monopole ne sera pas abordé. Ce prix est supposé être une variable aléatoire p, de distribution f(p), d'espérance mathématique $p^* = \int p f(p) dp$ et de variance $\sigma^2 = \int (p - p^*)^2 f(p) dp$. La fonction de décision de l'entreprise selon la production est supposé être $V(Q) = E(B(Q)) - \lambda \text{Var}(B(Q))$, où B, le bénéfice après redevance, est une variable aléatoire du fait du prix, E l'espérance mathématique de B, Var sa variance et λ un coefficient qui traduit l'importance attachée à la dispersion du résultat autour de sa moyenne. λ est positif du fait de l'aversion au risque. Cette fonction est caractéristique du « modèle espérance - variance » utilisé en théorie des choix financiers¹⁷. L'entreprise fixe son niveau de production Q ex ante en fonction de la distribution de p, de façon à maximiser V ; cette hypothèse sur Q est certes critiquable, mais justifiée par la rigidité des processus de production. La fonction de dépense de l'entreprise est supposée certaine : $D = D(Q)$. Nous noterons $D' = \frac{dD}{dQ}$.

10.2 Pas de redevance

Nous maximisons $V = E(pQ - D(Q)) - \lambda \text{Var}(pQ - D(Q))$.

La condition du premier ordre s'écrit

$$0 = p^* - D' - \lambda \frac{d}{dQ} \int Q^2 (p - p^*)^2 f(p) dp$$

d'où $p^* = D' + 2\lambda\sigma^2 Q$.

C'est-à-dire : le prix moyen dépasse le coût marginal d'une prime de risque $2\lambda\sigma^2 Q$, et la production Q est moindre que dans le cas sans risque, avec un coût marginal croissant.

La condition du second ordre implique $-(D'' + 2\lambda\sigma^2) < 0$, ce qui est garanti dès lors que le coût marginal est non décroissant, hypothèse faite dans cette étude ; la présence de la prime de risque fait que la condition du second ordre est opérante même avec un coût marginal constant ($D'' = 0$), à la différence du cas en univers certain.

¹⁷ voir par exemple L. Eeckhoudt et C. Gollier, Les risques financiers (EDISCIENCE éd.).

10.3 Redevance forfaitaire

La fonction de décision devient

$V = E(pQ - D(Q) - K_1) - \lambda \text{Var}(pQ - D(Q) - K_1)$. Comme K_1 est une constante, $E(K_1) = K_1$. Il est aisé de vérifier que les conditions du premier et du second ordre sont identiques au cas sans redevance (§ 10.2).

Il y a parallélisme avec la situation en univers certain : le niveau de production Q est affecté par le risque, mais pas par la redevance forfaitaire offerte.

10.4 Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

La redevance $K_2 = apQ$ est un aléa de moyenne $K_2^* = aQp^*$. Nous maximisons la fonction de décision $V(Q) = E((1-a)pQ - D(Q)) - \lambda \text{Var}((1-a)pQ - D(Q))$.

La condition du premier ordre se traduit par :

$$p^* = \frac{D'}{1-a} + 2(1-a)\lambda\sigma^2 Q \text{ et il est aisé de vérifier que}$$

la condition du second ordre est satisfaite avec un coût marginal non décroissant.

Comparons les productions optimales Q_1 et Q_2 , respectivement dans les cas de redevance fixe (1) et proportionnelle au chiffre d'affaires (2), en supposant, de plus, le coût marginal constant : $D' = m$, pour avoir des calculs simples. Alors

$$Q_1 = \frac{p^* - m}{2\lambda\sigma^2} \text{ et } Q_2 = \frac{(1-a)p^* - m}{2(1-a)^2\lambda\sigma^2}, \text{ d'où :}$$

$$Q_2 - Q_1 = \frac{a(1-a)p^* - ma(2-a)}{2(1-a)^2\lambda\sigma^2}. \text{ Si nous supposons } a$$

petit devant 1, ce qui est probable (a de l'ordre de quelques %), nous avons l'approximation

$$Q_2 - Q_1 \approx \frac{a(p^* - m(2+a))}{2(1-a)\lambda\sigma^2}. \text{ L'expression a le signe}$$

de $p^* - (2+a)m$. S'agissant d'un marché concurrentiel et malgré la prime de risque, il est peu probable que le prix soit plus du double du coût marginal, par conséquent l'expression est vraisemblablement négative et $Q_1 > Q_2$.

C'est-à-dire : la production est plus forte dans le cas de la redevance forfaitaire que dans le cas de la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires. Nous retrouvons le résultat obtenu en univers certain.

Nous comparons maintenant, sous la même hypothèse de coût marginal constant, les espérances de redevance dans les cas (1) et (2) pour une même valeur de la fonction de

décision V , c'est-à-dire en admettant que l'entreprise se fixe le même objectif pour V quelle que soit l'assiette de redevance, optimise la production et ajuste le niveau de la redevance offerte dans chaque cas pour respecter cette contrainte, qui se formule :

$$E(pQ_1 - D(Q_1) - K_1) - \lambda \text{Var}(pQ_1 - D(Q_1) - K_1) = E(pQ_2 - D(Q_2) - K_2) - \lambda \text{Var}(pQ_2 - D(Q_2) - K_2) \text{ avec } K_2 = ap^*Q_2 \text{ et } D(Q) = mQ + F.$$

Tous calculs faits :

$$K_2^* - K_1 = (p^* - m)(Q_1 - Q_2) + \lambda\sigma^2(Q_1 + (1-a)Q_2)(Q_1 - (1-a)Q_2). \text{ Le premier terme est positif car } p^* > m \text{ et } Q_1 > Q_2. \text{ Le second terme a le signe de } Q_1 - (1-a)Q_2 = \frac{am}{2(1-a)\lambda\sigma^2} > 0.$$

Donc $K_2^* > K_1$.

C'est-à-dire : l'espérance de redevance est plus élevée pour la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires que pour la redevance forfaitaire.

10.5 Redevance proportionnelle à l'activité

En présence de la redevance $K_3 = bQ$, la maximisation de V conduit à $p^* = D' + b + 2\lambda\sigma^2 Q$.

Dans le cas d'un coût marginal constant m , nous trouvons

$$Q_3 - Q_1 = -\frac{b}{2\lambda\sigma^2} < 0.$$

C'est-à-dire : la production est plus forte dans le cas de la redevance forfaitaire que dans le cas de la redevance proportionnelle à l'activité (résultat similaire à celui du § 10.4). En revanche, l'espérance de redevance K_3^* peut être en principe inférieure ou supérieure à K_1 selon les valeurs de p^* , m et b , car le signe de $K_3^* - K_1$ est celui de $p^* - m - b$: mais, raisonnablement, b aura été fixé à un niveau suffisamment bas pour ne pas trop entamer la rentabilité, de sorte que $p^* - m - b > 0$ et $K_3^* > K_1$.

C'est-à-dire : l'espérance de redevance est plus élevée pour la redevance proportionnelle à l'activité que pour la redevance forfaitaire.

10.6 Redevance proportionnelle au bénéfice

La redevance est $K_4 = c(pQ - D(Q))$ si $pQ > D$, sinon elle est égale à zéro. Pour éviter des calculs compliqués, nous supposerons que la distribution de p est telle que partout $pQ \geq D$.

Nous maximisons $V = E((1-c)(pQ-D(Q))) - \lambda \text{Var}((1-c)(pQ-D(Q)))$.

La condition du premier ordre se traduit par

$$p^* = D' + 2(1-c)\lambda\sigma^2 Q.$$

Supposant en outre le coût marginal constant ($D'=m$), la comparaison des productions optimales donne

$$Q_4 = \frac{Q_1}{1-c} > Q_1.$$

$$Q_4 - Q_2 = \frac{p^* - m}{2(1-c)^2 \lambda \sigma^2} - \frac{(1-a)p^* - m}{2(1-a)^2 \lambda \sigma^2}. \text{ Comme il}$$

est très probable que $c > a$ (taux de prélèvement plus important sur le bénéfice que sur le chiffre d'affaires), nous avons $Q_4 > Q_2$, d'où $Q_4 > Q_1 > Q_2$ en tenant compte de $Q_1 > Q_2$ (cf. § 10.4).

C'est-à-dire : la production est plus forte dans le cas de la redevance proportionnelle au bénéfice que dans le cas de la redevance forfaitaire.

Soit K_4^* l'espérance de la redevance proportionnelle au bénéfice. Nous la comparons aux autres espérances de redevance pour une même valeur de la fonction de décision, toujours dans l'hypothèse de coût marginal constant m . Tous calculs faits : $K_4^* - K_1 = (p^* - m)(Q_4 - Q_1) > 0$.

C'est-à-dire : l'espérance de redevance est plus élevée pour la redevance proportionnelle au bénéfice que pour la redevance forfaitaire.

En revanche, le signe de $K_4^* - K_2^*$ est ambigu¹⁸ et nous

ne pouvons pas tirer de conclusion générale pour la comparaison entre redevances proportionnelles au chiffre d'affaires et au bénéfice.

10.7 Conclusion

Le modèle met en évidence les primes de risque, par quoi le prix diffère du coût marginal à l'optimum.

Avec une restriction sur la forme de la fonction de dépense (coût marginal constant), et sans pouvoir affirmer que les conclusions valent aussi avec d'autres fonctions de dépense, nous obtenons :

- quant à l'impact des redevances sur la production : (i) la perception d'une redevance forfaitaire n'affecte pas le niveau de production, (ii) la perception d'une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires ou au volume d'activité réduit la production, (iii) la perception d'une redevance proportionnelle au bénéfice n'a pas d'impact sur la production ;
- quant à la comparaison des espérances mathématiques de perception de redevances pour une même valeur de la fonction de décision de l'entreprise : l'espérance est plus élevée avec la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires, ou avec la redevance proportionnelle au bénéfice (si, dans ce cas, la distribution de l'aléa sur le prix est telle qu'il n'y ait pas de perte), qu'avec la redevance forfaitaire.

11. Un modèle de type espérance - variance avec aléa sur la production

11.1 Description du modèle

Nous considérons une entreprise qui subit le prix du marché. Le cas du monopole ne sera pas abordé. Ce prix p est supposé certain. La fonction de dépense D de l'entreprise est supposée certaine, mais la production est un aléa Q de moyenne Q^* et de variance σ^2 , de sorte que la dépense effective, ayant la production comme argument, est aléatoire. La dispersion de la production est supposée faible, ce qui autorisera à représenter la fonction de dépense par un développement limité au second ordre :

$$D(Q) \approx D(Q^*) + (Q - Q^*)D'(Q^*) + \frac{(Q - Q^*)^2}{2} D''(Q^*)$$

Comme au chapitre 10, la fonction de décision de l'entreprise est $V = E(\text{bénéfice après redevance}) - \lambda \text{Var}(\text{bénéfice après redevance})$, où λ est l'indicateur de risque qu'elle s'est fixé. L'hypothèse de comportement est cette fois que l'entreprise ne s'engage dans l'affaire que si $V > 0$. $V = 0$ détermine la redevance maximale qu'elle est disposée à payer¹⁹. Nous comparerons alors les espérances de redevance maximale à quoi le concédant peut prétendre, selon les différentes assiettes.

¹⁸ le calcul n'est pas détaillé ici.

¹⁹ nous pourrions, sans altérer le raisonnement, prendre V supérieur à un seuil quelconque, au lieu de zéro.

L'espérance mathématique du profit avant redevance est :

$$E(pQ - D(Q)) \approx pQ^* - D - \frac{\sigma^2}{2} D'' , \text{ en notant pour}$$

simplifier l'écriture $D=D(Q^*)$, $D'=D'(Q^*)$, $D''=D''(Q^*)$.

La variance du profit avant redevance est :

$$\begin{aligned} \text{Var}(pQ - D(Q)) &\approx \text{Var}(pQ - D - (Q - Q^*)D' - \frac{(Q - Q^*)^2}{2} D'') = \text{Var}(pQ - D - QD' + Q^*D' - \frac{(Q - Q^*)^2}{2} D'') \\ &= (p - D')^2 \sigma^2 + \frac{D''^2}{4} \text{Var}((Q - Q^*)^2) \end{aligned}$$

en tenant compte de ce que $\text{Var}(D) = 0$ et $\text{Var}(Q^*D') = 0$.

D'où, en notant $\Sigma^2 = \text{Var}((Q - Q^*)^2)$:

$$\text{Var}(pQ - D(Q)) \approx (p - D')^2 \sigma^2 + \frac{D''^2}{4} \Sigma^2 .$$

11.2 Redevance forfaitaire

La redevance maximale correspondant à $V=0$ est :

$$K_1 = E(K_1) = pQ^* - D - \frac{\sigma^2}{2} D'' - \lambda((p - D')^2 \sigma^2 + \frac{\Sigma^2}{4} D''^2) .$$

11.3 Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

L'espérance maximale est $E(K_2) = apQ^*$ pour $V=0$, d'où :

$$E(K_2) = pQ^* - D - \frac{\sigma^2}{2} D'' - \lambda((p(1-a) - D')^2 \sigma^2 + \frac{\Sigma^2}{4} D''^2) .$$

11.4 Redevance proportionnelle à l'activité

L'espérance maximale est $E(K_3) = bQ^*$ pour $V=0$, d'où :

$$E(K_3) = pQ^* - D - \frac{\sigma^2}{2} D'' - \lambda((p - b - D')^2 \sigma^2 + \frac{\Sigma^2}{4} D''^2) .$$

11.5 Redevance proportionnelle au bénéfice

L'espérance maximale est $E(K_4) = c(pQ^* - E(D(Q^*)))$ pour $V=0$, d'où :

$$E(K_4) = pQ^* - D - \frac{\sigma^2}{2} D'' - \lambda(1-c)^2((p - D')^2 \sigma^2 + \frac{\Sigma^2}{4} D''^2) .$$

11.6 Conclusion

La comparaison des espérances de redevance (§ 11.2 à 11.5) donne :

$$E(K_1) - E(K_2) = \lambda \sigma^2 [(p(1-a) - D')^2 - (p - D')^2] < 0 .$$

$$E(K_1) - E(K_3) = \lambda \sigma^2 [(p - b - D')^2 - (p - D')^2] < 0 .$$

$$E(K_1) - E(K_4) = \lambda \sigma^2 (p - D')^2 [(1-c)^2 - 1] < 0 .$$

$$E(K_2) - E(K_3) = \lambda \sigma^2 [(p - b - D')^2 - (p(1-a) - D')^2] ,$$

expression de signe positif ou négatif selon les valeurs de a et de b .

$$E(K_2) - E(K_4) = \lambda \sigma^2 [(p - D')^2 (1-c)^2 - (p(1-a) - D')^2] ,$$

expression de signe positif ou négatif selon les valeurs de a et de c .

C'est-à-dire : en espérance mathématique, la redevance sur le chiffre d'affaires, celle sur l'activité et celle sur le bénéfice rapportent plus au concédant que la redevance forfaitaire.

C'est le facteur risque, c'est-à-dire le terme en λ , qui « fait la différence ». Si l'investisseur se déterminait sur la seule espérance de gain (λ nul), il pourrait offrir, en moyenne, la même redevance quelle que soit l'assiette.

L'investisseur demande une prime de risque (terme en λ) supérieure s'il s'expose à une redevance forfaitaire. Dit autrement, la concession sera plus attractive pour l'investisseur si le concédant exige de lui une redevance proportionnelle à un paramètre de son activité, plutôt qu'une redevance fixe.

12. Un modèle de maximisation de l'espérance de l'utilité avec aléa sur le prix

12.1 Description du modèle

Ce modèle s'inspire aussi de la théorie des choix financiers en univers incertain. L'agent économique est supposé maximiser l'espérance mathématique d'une utilité, fonction de son bénéfice ou de sa richesse.

Nous considérons d'abord une entreprise en concurrence parfaite, donc qui subit le prix ; le cas du monopole sera rapidement examiné en fin de chapitre. Le prix de marché

est une variable aléatoire p , de moyenne p^* . La fonction de décision de l'entreprise est supposée être une fonction d'utilité de son bénéfice après redevance. Soit U cette fonction d'utilité, qui selon les postulats habituels a les propriétés suivantes : utilité croissante, soit $U' > 0$; utilité marginale décroissante, soit $U'' < 0$; cette dérivée seconde négative (convexité) traduit l'aversion au risque. L'entreprise est supposée fixer son niveau de production Q

ex ante (hypothèse certes critiquable) en fonction de la distribution de p , de façon à maximiser l'espérance mathématique, désignée par E , de l'utilité de son bénéfice. La fonction de dépense de l'entreprise est supposée certaine : $D=D(Q)$. Le bénéfice est une variable aléatoire du fait du prix.

12.2 Pas de redevance

L'entreprise maximise, en fonction de Q , $V=E(U(B))=E(U(pQ-D(Q)))$. La condition du premier ordre $V'=0$ donne $E((p-D')U')=0$, où le coût marginal $D'=\frac{dD}{dQ}$ est certain, et $U'=\frac{dU}{dQ}$ est un aléa car fonction de l'aléa p . Pour deux aléas X et Y , $E(XY)=E(X)E(Y)+cov(XY)$, où cov désigne la covariance. L'emploi de cette formule à l'optimum de V , donc avec $E((p-D')U')=0$, donne $cov(U', p-D') = -E(U')E(p-D')$. Or $cov(U', p-D') = cov(U', p)$ car D' est certain, et $E(p-D')=p^*-D'$, d'où $p^* = D' - \frac{cov(U', p)}{E(U')}$.

$E(U') > 0$ puisque $U' > 0$ partout, et $cov(U', p) < 0$ car, lorsque p diminue, le bénéfice ou la richesse diminuent, donc l'utilité marginale augmente. Donc $\frac{cov(U', p)}{E(U')} < 0$ et $p^* > D'$.

C'est-à-dire : le risque (pris en compte par le terme $-cov/E$ qui constitue une « prime de risque ») a pour effet que la production est fixée à un niveau où le coût marginal est inférieur au prix moyen, alors qu'à l'optimum en univers certain le prix, qui est aussi le prix moyen, et le coût marginal sont égaux. Comme la fonction d'offre ou fonction de coût marginal est croissante ($D'' > 0$), le niveau de production optimal est inférieur à celui en univers certain : le risque a un effet malthusien.

Nous vérifions que la condition du second ordre est satisfaite : $V'' = E(-D''U' + (p-D')^2U'') = -D''E(U') + E((p-D')^2U'')$. Comme $D'' > 0$, $E(U') > 0$, $(p-D')^2 > 0$ et $U'' < 0$, nous sommes sûrs que $V'' < 0$.

12.3 Redevance forfaitaire

Soit K_1 cette redevance. L'entreprise maximise l'espérance mathématique de l'utilité de son bénéfice après redevance : $V = E(U(pQ-D(Q)-K_1))$. La condition du premier ordre donne le même résultat que sans redevance $p^* = D' - \frac{cov(U', p)}{E(U')}$. Il est facile de vérifier celle du second ordre.

Toutefois, à la différence de ce qui se passe en économie

certaine, la redevance influence (négativement) le niveau de production.

En effet, si nous posons $Z = V' = E((p-D')U')$, la condition du premier ordre $V'=0$ permet d'écrire la différentielle totale $dZ=0$ où Z est considéré comme fonction de Q et de K : $dZ = 0 = Z'_Q dQ + Z'_K dK$. Comme $Z'_Q < 0$ du fait de la condition du second ordre, $\frac{dQ}{dK}$ a le signe de Z'_K .

Or $Z'_K = E(-U''(p-D')) = E(-\frac{U''}{U'}(p-D')U')$. Dans l'argument de E , $(p-D')$ est négatif pour p faible, puis devient positif pour p fort ; U' est positif ; $-\frac{U''}{U'}$, appelé l'aversion

absolue au risque, est positif ; l'hypothèse ordinaire, en théorie des choix financiers, est que cette aversion absolue décroît quand la richesse augmente, donc ici quand p croît ; sous cette hypothèse classique de comportement, pour le calcul de l'intégrale E les termes avec $p-D' < 0$ ont un poids fort en $(-\frac{U''}{U'})$ et les termes avec $p-D' > 0$, un poids faible, de sorte que $Z'_K < 0$ et $\frac{dQ}{dK}$ aussi : Q diminue quand K augmente. A contrario, dans le modèle déterministe $MAX B(Q) = pQ - D(Q) - K_1$, $Z=B'=p-D'$ d'où $Z'_K = 0$ et, comme nous le voyons en annulant la différentielle totale dZ , Q optimum ne dépend pas de K .

12.4 Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

L'entreprise maximise l'espérance mathématique de l'utilité de son bénéfice après paiement de la redevance égale à $K_2=apQ$, soit $V = E(U((1-a)pQ-D(Q)))$. La condition du premier ordre, développée selon la méthode présentée pour le cas sans redevance, donne $p^* = \frac{D'}{1-a} - \frac{cov(U', p)}{E(U')}$.

C'est-à-dire : le prix moyen est supérieur au coût marginal à l'optimum de production, à la fois à cause du risque (terme cov/E) et de l'impact de l'assiette de la redevance sur la production (terme $\frac{1}{1-a} > 1$) : c'est un double effet

malthusien.

Sans plus de spécification sur les fonctions d'utilité et de dépense, il ne paraît pas possible de comparer les redevances K_2 et K_1 ou leurs espérances. Nous esquissons seulement la méthode, qui consisterait à supposer que le

candidat fixe son espérance d'utilité V , en optimisant sa décision de production Q , au même niveau quelle que soit l'assiette de la redevance ; nous comparerions ainsi Q_1 et Q_2 , étant fait observer qu'à la différence du cas déterministe, l'examen des conditions du premier ordre ne permet pas de conclure immédiatement sur les valeurs relatives de Q_1 et Q_2 , du fait que le terme cov/E dépend aussi de Q ; puis, en égalant V optimal dans les deux hypothèses d'assiette, nous établirions une relation entre K_1 et a ; nous calculerions enfin $E(K_2) = aQp^*$ et le comparerions à $E(K_1) = K_1$, de façon à apprécier quelle redevance, en espérance, rapporterait le plus au concédant. La difficulté du calcul tient à la non-linéarité du modèle : (i) convexité de la fonction d'utilité reflétant l'aversion au risque ; (ii) convexité de la fonction de dépense (nous pourrions toutefois travailler, en perdant de la généralité, sur un modèle à coût marginal constant) ; (iii) distribution de la variable aléatoire p , qui n'a pas de raison d'être linéaire, mais plutôt gaussienne. Il faudrait donc traiter le modèle sur ordinateur avec la méthode de Monte-Carlo ou les techniques du calcul numérique, seules capables de « venir à bout » des intégrales intervenant dans cov et E et des équations déterminant les productions. Ces considérations valent aussi pour la comparaison d'autres modalités d'assiette, comme esquissé ci-dessous.

12.5 Redevance proportionnelle à l'activité

L'entreprise maximise l'espérance mathématique de l'utilité de son bénéfice après paiement de la redevance égale à $K_3 = bQ$, soit $V = E(U((p-b)Q - D(Q)))$. La condition du premier ordre, développée selon la méthode présentée pour le cas sans redevance, donne $p^* = D' + b - \frac{\text{cov}(U', p)}{E(U')}$.

Même conclusion qu'au paragraphe précédent : le prix moyen est supérieur au coût marginal à l'optimum de production, à la fois à cause du risque et de l'impact de l'assiette de la redevance sur la production.

12.6 Redevance proportionnelle au bénéfice

L'entreprise maximise l'espérance mathématique de l'utilité de son bénéfice après paiement de la redevance égale à $K_4 = c(pQ - D(Q))$, soit $V = E(U((1-c)(pQ - D(Q)))$ pour $pQ - D > 0$ (si $pQ - D < 0$, K_4 est pris nul). La condition du premier ordre, développée selon la méthode présentée pour le cas

sans redevance, donne $p^* = D' - \frac{\text{cov}(U', p)}{E(U')}$. C'est la même formule que dans les cas sans redevance ou avec redevance fixe, mais seulement en apparence puisque la distribution de probabilité du bénéfice peut être modifiée (condition $K_4 = 0$ si $pQ - D < 0$).

Par un raisonnement semblable à celui du § 12.3, il est possible de montrer que la redevance affecte négativement le niveau de production à cause du facteur risque.

12.7 Cas du monopole

Nous considérons ici que le prix est une fonction aléatoire de la production qui, elle, est décidée de manière univoque par l'entreprise. Nous traitons seulement le cas sans redevance. La transposition des cas avec redevance examinés sous l'hypothèse de concurrence ne présente pas de difficulté.

L'entreprise maximise $V(Q) = E(U(Qp(Q) - D(Q)))$. En utilisant la formule $E(XY) = \text{cov}(XY) + E(X)E(Y)$ et en désignant par p' l'aléa égal à la dérivée de p par rapport à Q , la condition du premier ordre donne :

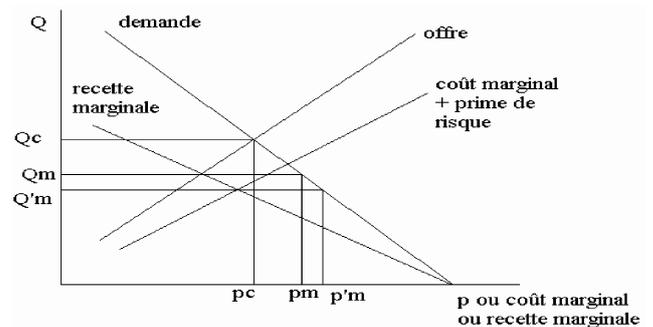
$$0 = E((p + Qp' - D')U') = \text{cov}(p + Qp' - D', U') + E(U')E(p + Qp' - D').$$

$$\text{Soit } 0 = \text{cov}(p, U') + Q\text{cov}(p', U') + E(U')(p^* - D' + QE(p')).$$

$$D' \text{ où } p^* + QE(p') = D' - \frac{\text{cov}(p, U') - Q\text{cov}(p', U')}{E(U')}$$

La différence avec la formule classique du cas déterministe, rappelé dans la deuxième partie, « recette marginale = coût marginal » soit $p + Qp' = D'$ apparaît bien : le premier membre est similaire (recette marginale compté cette fois en espérance mathématique), tandis que le second diffère par le terme représentatif de l'aléa. Nous avons vu au § 12.2 que $E(U') > 0$ et $\text{cov}(U', p) < 0$. La fonction $p(Q)$ est concave ($p'' > 0$) ou au pire linéaire (comme sur le graphique ci-contre) ; quand Q croît, p décroît, U' baisse ($\text{cov}(U', p) > 0$) tandis que p' croît donc $\text{cov}(p', U') > 0$. Au total, le second terme du second membre ($-\frac{\text{cov}(p, U') - Q\text{cov}(p', U')}{E(U')}$),

représentatif d'une prime de risque, est positif.



C'est-à-dire : la prise en compte du risque fait que la recette marginale doit excéder le coût marginal et que l'équilibre entre offre et demande s'établit à un niveau de production plus bas. A l'effet malthusien propre au monopole en univers certain s'ajoute un nouvel effet restrictif sur la production et inflationniste sur le prix, dû à la prime de risque.

12.8 Conclusion

Le risque modifie la règle d'optimisation par l'égalité du prix (ou de sa moyenne) ou de la recette marginale (ou de sa moyenne) au coût marginal ; le prix devient plus élevé que

le coût marginal à l'optimum, la production tend à être plus faible qu'en univers certain.

Il ne paraît pas possible de tirer des conclusions générales du modèle quant aux mérites respectifs des types de redevance en termes de rendement pour le concédant ; cependant, à la différence de l'univers certain, la redevance forfaitaire et la redevance proportionnelle au bénéfice ont désormais un impact, négatif, sur le niveau de production, comme l'ont dans tous les univers (certain ou incertain) les redevances proportionnelles au chiffre d'affaires ou à l'activité.

13. Un modèle simplifié de maximisation de l'espérance de l'utilité avec aléa sur le prix

13.1 Description du modèle

Nous reprenons le cadre du chapitre 12 en simplifiant l'analyse, sans toutefois trop en limiter la portée, de manière à tirer des conclusions plus pratiques. Nous nous plaçons dans l'hypothèse de concurrence où l'entreprise n'a pas d'influence sur le prix, lequel est supposé être une variable aléatoire discrète, qui ne peut prendre que deux valeurs (2 états de la nature seulement), p_i avec la probabilité μ , p_j avec la probabilité $(1-\mu)$. Nous écrivons $p_j > p_i$ sans restreindre la portée de l'analyse. Pour simplifier également, le volume de la production, Q , est supposé fixé de manière exogène. Soit $F = D(Q)$ la dépense totale, qui est fixée également avec Q . L'entreprise a une fonction d'utilité croissante et concave.

Le modèle va répondre aux questions suivantes : quelles redevances l'entreprise offrira-t-elle *ex ante*, selon l'assiette, dans la même configuration de production, pour avoir la même espérance d'utilité ? quelle sera l'espérance mathématique de la redevance dans chaque formule d'assiette de celle-ci ?

13.2 Comparaison de redevances forfaitaire et proportionnelle au chiffre d'affaires

La redevance forfaitaire est K et la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires ap_jQ .

Nous imposons l'égalité des espérances d'utilité dans les deux hypothèses d'assiette :

$$\mu U(p_iQ-F-K) + (1-\mu)U(p_jQ-F-K) = \mu U(p_iQ-F-ap_iQ) + (1-\mu)U(p_jQ-F-ap_jQ)$$

Nous notons pour alléger l'écriture : $x_i=p_iQ-F-K$, $x_j=p_jQ-F-K$, $y_i=p_iQ-F-ap_iQ$, $y_j=p_jQ-F-ap_jQ$, $A=U(x_i)$, $B=U(x_j)$, $C=U(y_i)$, $D=U(y_j)$.

Nous comparons K , ap_iQ et ap_jQ .

Trois cas sont *a priori* possibles (en négligeant les cas d'égalité qui se traitent aisément) :

cas (1) : $K < ap_iQ < ap_jQ$

cas (2) : $ap_iQ < ap_jQ < K$

cas (3) : $ap_iQ < K < ap_jQ$.

Comme $p_i < p_j$, nous avons $F+ap_iQ < F+ap_jQ$, d'où, grâce à la croissance de U : $A < B$ et $C < D$.

Le cas (1) impliquerait $p_iQ-K-F > p_iQ-F-ap_iQ$, soit $A > C$, et $p_jQ-K-F > p_jQ-F-ap_jQ$, soit $B > D$, d'où $C < A < D < B$. Mais l'égalité des espérances d'utilité implique $\mu(A-C) = (1-\mu)(D-B)$, ce qui est incompatible avec ce classement puisque μ et $(1-\mu) > 0$ et d'un côté $A-C > 0$ et de l'autre $D-B < 0$. Donc (1) est impossible.

Le cas (2) implique $p_iQ-K-F < p_iQ-F-ap_iQ$, soit $A < C$, et $p_jQ-K-F < p_jQ-F-ap_jQ$, soit $B < D$, d'où $A < C < D$ et $A < B < D$.

Il y a alors deux sous-cas :

- sous-cas (2-1) $A < B < C < D$, entraînerait $\mu(A-C) = (1-\mu)(D-B)$, impossible car 1er membre < 0 , second membre > 0
- sous-cas (2-2) $A < C < B < D$, entraînerait la même impossibilité.

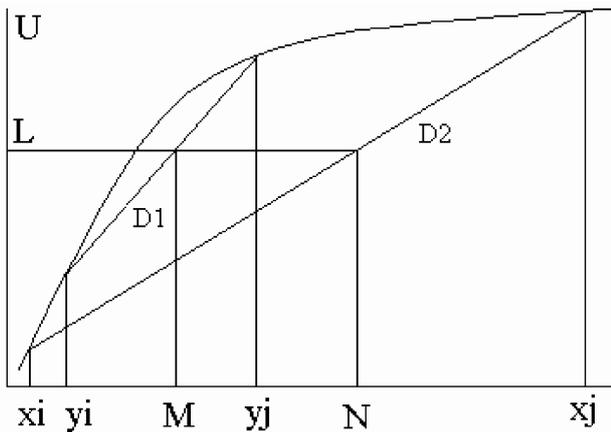
Donc (2) est impossible.

Le cas (3) implique $p_iQ-K-F < p_iQ-F-ap_iQ$, soit $A < C$, et $p_jQ-F-ap_jQ < p_jQ-K-F$, soit $D < B$, d'où $A < B < C < D$, ce qui est compatible avec l'égalité des espérances.

Nous retenons donc le seul cas (3) : $ap_iQ < K < ap_jQ$. L'offre de redevance forfaitaire, indépendante des états de la nature, est intermédiaire entre les offres de redevance proportionnelle selon l'état de la nature.

Nous évaluons maintenant les espérances de redevance. L'inégalité $A < B < C < D$ et la croissance de U impliquent $x_i < y_i < y_j < x_j$.

Comme nous le voyons sur le graphique ci-dessous, du fait de la convexité de U et de la position de x_i , y_i , y_j et x_j , le segment de droite $D2$ entre y_i et x_j est à droite du segment de droite $D1$; du fait alors de la condition d'égalité des espérances (égales à l'ordonnée du point L), l'abscisse du point M , définie par $\mu y_i + (1-\mu)y_j$, est inférieure à celle du point N , définie par $\mu x_i + (1-\mu)x_j$. En remplaçant, dans l'inégalité $\mu y_i + (1-\mu)y_j < \mu x_i + (1-\mu)x_j$, les x et y par leurs valeurs, il vient après quelques calculs non reproduits ici : $E(K) = K < \mu ap_iQ + (1-\mu)ap_jQ = E(\text{redevance proportionnelle})$.



C'est-à-dire : en espérance mathématique, la redevance forfaitaire rapporte moins que la redevance proportionnelle.

13.3 Comparaison de redevances forfaitaire et proportionnelle au bénéfice

La redevance proportionnelle au bénéfice est $c(pQ-F)$.

Un raisonnement semblable à celui du paragraphe précédent, non reproduit, montre que :

- $c(p_iQ-F) < K < c(p_jQ-F)$ quand $p_i < p_j$ (nous supposons aussi

$pQ > F$) : l'offre de redevance forfaitaire, indépendante des états de la nature, est intermédiaire entre les offres de redevance proportionnelle selon l'état de la nature ;

- $E(K) = K < \mu c(p_iQ-F) + (1-\mu)c(p_jQ-F) = E(\text{redevance proportionnelle})$: en espérance, la redevance forfaitaire rapporte moins que la redevance proportionnelle.

13.4 Comparaison de redevances proportionnelle au chiffre d'affaires et proportionnelle au bénéfice

Nous notons $x_i = p_iQ(1-a)-F$, $x_j = p_jQ(1-a)-F$, $y_i = (1-c)(p_iQ-F)$, $y_j = (1-c)(p_jQ-F)$, $A = U(x_i)$, $B = U(x_j)$, $C = U(y_i)$, $D = U(y_j)$. Comme $p_i < p_j$ et que la fonction d'utilité est croissante, $x_i < x_j$, $A < B$, $y_i < y_j$, $C < D$. Comme $\mu(A-C) = (1-\mu)(D-B)$ avec $0 < \mu < 1$, nous avons soit $A > C$ et $D > B$ (cas 1), ce qui entraîne $C < A < B < D$ et $y_i < x_i < x_j < y_j$, soit $A < C$ et $D < B$ (cas 2), ce qui entraîne $A < C < D < B$ et $x_i < y_i < y_j < x_j$. Les deux cas sont possibles. En utilisant la convexité de U et un graphique semblable à celui du § 13.2, nous trouvons :

- cas 1 : $\mu x_i + (1-\mu)x_j < \mu y_i + (1-\mu)y_j$ et $E(\text{redevance sur bénéfice}) = \mu c(p_iQ-F) + (1-\mu)c(p_jQ-F) < \mu ap_iQ + (1-\mu)ap_jQ = E(\text{redevance sur chiffre d'affaires})$;
- cas 2 : $\mu y_i + (1-\mu)y_j < \mu x_i + (1-\mu)x_j$ et $E(\text{redevance sur bénéfice}) > E(\text{redevance sur chiffre d'affaires})$.

Ainsi, selon les circonstances, l'espérance de redevance pour le concédant sera plus forte dans l'une ou l'autre des formules d'assiette. Les deux formules ne peuvent être discriminées sous cet aspect.

13.5 Conclusion

Lorsque nous négligeons l'interaction entre le prix et la production, la prise en considération du risque a pour effet qu'à espérance d'utilité donnée, un candidat offrira davantage, en espérance mathématique, si la redevance est proportionnelle au chiffre d'affaires ou au bénéfice que si la redevance est forfaitaire. La formule de redevance proportionnelle au bénéfice et celle proportionnelle au chiffre d'affaires ne peuvent être différenciées au regard de l'espérance de redevance pour le concédant.

14. Un modèle avec aléa sur le prix et probabilité de ruine

14.1 Description du modèle

L'entreprise a une richesse²⁰ initiale certaine W_0 et, après exploitation de la concession, une richesse finale aléatoire $W_f = W_0 + B$, où B est le bénéfice aléatoire de la concession après redevance. Comme au chapitre 10, l'entreprise subit un prix aléatoire p , dont la moyenne est p^* et la fonction de répartition : probabilité($p \leq p_1$) = $F(p_1)$. La production Q , fixée *ex ante*, est certaine, ainsi que la fonction de dépense $D = D(Q)$. Soit α la probabilité de ruine acceptable ($0 < \alpha \ll 1$). L'entreprise module son comportement de façon que : probabilité($W_f < 0$) < α . Nous comparons les *maxima* d'espérances de redevance que l'entreprise peut offrir selon l'assiette de la redevance, pour un même niveau d'espérance de richesse finale ou, ce qui revient au même, pour un même niveau d'espérance de bénéfice après redevance B^* .

D'une manière générale, si K est la redevance, l'entreprise détermine Q de façon à faire une espérance de bénéfice $B^* = W_f^* - W_0 = p^*Q - D(Q) - E(K)$, en respectant la contrainte de non - ruine : probabilité ($W_0 + p^*Q - D(Q) - E(K) < 0$) < α .

14.2 Redevance forfaitaire

Soit K_1 cette redevance.

$K_1^* = E(K_1) = K_1$. La production Q_1 et la redevance K_1 sont déterminées par le système :

$$W_0 + p^*Q_1 - D(Q_1) - K_1 = W_f^* \quad (1)$$

$$\text{probabilité}(W_0 + pQ_1 - D(Q_1) - K_1 \leq 0) = \alpha \quad (2)$$

$$(2) \text{ s'écrit } F\left(\frac{K_1 - W_0 + D(Q_1)}{Q_1}\right) = \alpha.$$

Portant (1) dans (2), nous obtenons $F\left(p^* - \frac{W_f^*}{Q_1}\right) = \alpha$ qui détermine Q_1 . Nous en déduisons K_1 en reportant la valeur de Q_1 dans (1).

14.3 Redevance proportionnelle au chiffre d'affaires

Soit K_2 cette redevance.

$K_2 = aQ_2p$ d'où $K_2^* = E(K_2) = aQ_2p^*$. Q_2 et K_2^* sont déterminées par le système :

$$W_0 + p^*Q_2 - D(Q_2) - K_2^* = W_f^* \quad (1)$$

$$\text{probabilité}(W_0 + pQ_2 - D(Q_2) - K_2 \leq 0) = \alpha \quad (2)$$

$$(2) \text{ s'écrit } F\left(\frac{-W_0 + D(Q_2)}{(1-a)Q_2}\right) = \alpha, \text{ qui détermine } Q_2.$$

$$\text{Portant (1) dans (2), nous obtenons } F\left(p^* - \frac{W_f^*}{(1-a)Q_2}\right) = \alpha.$$

Comparaison de K_1 et K_2^*

De la contrainte de non - ruine $F(\cdot) = \alpha$, écrite dans les deux cas, nous déduisons $Q_1 = (1-a)Q_2$ donc $Q_1 < Q_2$.

Nous écrivons l'égalité des espérances de bénéfice dans les deux cas :

$$p^*Q_1 - D(Q_1) - K_1 = p^*Q_2 - D(Q_2) - K_2^*$$

Désignant par m le coût marginal, nous avons approximativement $K_1 - K_2^* = (p^* - m)(Q_1 - Q_2)$. Comme la présence de risque implique une prime positive ($p^* - m$) et comme $Q_1 - Q_2 < 0$, nous avons $K_1 < K_2^*$.

C'est-à-dire : l'espérance de la redevance forfaitaire est moindre que celle de la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires.

14.4 Redevance proportionnelle à l'activité

Soit K_3 cette redevance.

$K_3 = bQ_3$ d'où $K_3^* = E(K_3) = K_3$. Q_3 et K_3 sont déterminées par le système :

$$W_0 + p^*Q_3 - D(Q_3) - K_3^* = W_f^* \quad (1)$$

$$\text{probabilité}(W_0 + pQ_3 - D(Q_3) - K_3 \leq 0) = \alpha \quad (2)$$

$Q_3 = Q_1$, et $K_3 = K_1$ du fait de la condition d'égalité des bénéfices.

C'est-à-dire : l'espérance de la redevance forfaitaire est égale à celle de la redevance proportionnelle à l'activité.

²⁰ selon l'usage en mathématique financière, la richesse est désignée par W comme *Wealth*.

14.5 Redevance proportionnelle au bénéfice

Soit K_4 cette redevance.

$K_4 = c(Q_4 p - D(Q_4))$, d'où $K_4^* = E(K_4) = c(Q_4 p^* - D(Q_4))$, si et seulement si, ce que nous supposons pour ne pas compliquer le calcul, la distribution de p est telle que le bénéfice avant redevance n'est jamais négatif. Q_4 et K_4 sont déterminées par le système :

$$W_0 + p^* Q_4 - D(Q_4) - K_4^* = W_f^* \quad (1)$$

$$\text{probabilité}(W_0 + p Q_4 - D(Q_4) - K_4 \leq 0) = \alpha \quad (2)$$

Nous obtenons comme précédemment :

$$F\left(p^* - \frac{W_f^*}{(1-c)Q_4}\right) = \alpha \text{ d'où } (1-c)Q_4 = (1-a)Q_2 = Q_1.$$

Comparaison de K_1 et K_4^*

Comme $(1-c)Q_4 = Q_1$, $Q_4 > Q_1$. Approximativement $K_4^* - K_1 = (p^* - m)(Q_4 - Q_1)$. Comme la présence de risque implique une prime positive $(p^* - m)$ et comme $Q_4 - Q_1 > 0$, nous avons $K_4^* > K_1$.

C'est-à-dire : l'espérance de la redevance forfaitaire est moindre que celle de la redevance proportionnelle au bénéfice.

Comparaison de K_2^* et K_4^*

Comme $(1-c)Q_4 = (1-a)Q_2$, et comme très probablement $a < c$ (cf. § 10.6), nous avons $Q_4 > Q_2$. Approximativement $K_4^* - K_2^* = (p^* - m)(Q_4 - Q_2)$. Comme la présence de risque implique une prime positive $(p^* - m)$ et comme $Q_4 - Q_2 > 0$, nous avons $K_4^* > K_2^*$.

C'est-à-dire : l'espérance de la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires est moindre que celle de la redevance proportionnelle au bénéfice.

14.6 Conclusion

Nous avons $Q_1 = Q_3 < Q_2$ et de même $K_1 = K_3 < K_2$. De plus, lorsque la distribution de l'aléa prix est telle que le bénéfice avant redevance n'est pas négatif, condition très restrictive vis-à-vis de la contrainte de non-ruine, nous avons $Q_2 < Q_4$ et de même $K_2 < K_4$.

C'est-à-dire : l'assiette de redevance forfaitaire, qui induit le maximum de risque, conduit à limiter la production et le niveau de redevance offert en espérance, par rapport à la redevance proportionnelle au chiffre d'affaires et, dans certains cas, par rapport à la redevance proportionnelle au bénéfice.

15. Un modèle avec aléa sur la production et probabilité de ruine

Dans ce modèle, qui ne sera qu'esquissé en raison de la complexité des calculs dès lors qu'il y a des fonctions non linéaires, le prix p est certain et s'impose à l'entreprise. La fonction de dépense D est certaine, mais son argument Q est un aléa de moyenne Q^* et de variance σ^2 . Nous considérons toujours une probabilité de ruine α .

L'entreprise doit fixer Q^* et la redevance offerte K , avec $K^* = E(K)$, comme solutions du système :

$$B^* = E(B) = pQ^* - D(Q^*) - \sigma^2 D''(Q^*)/2 - K^*$$

$$\text{probabilité}(pQ - D(Q) - K + W_0 < 0) = \alpha$$

où la première équation résulte d'un développement limité au second ordre de $D(Q)$ au voisinage de Q^* , comme au chapitre 11, et où la seconde équation se transforme en faisant apparaître la fonction de répartition de l'aléa Q . Nous comparerons ensuite diverses assiettes de redevance en imposant, dans chaque cas, la même espérance de bénéfice B^* .

16. Conclusion de la troisième partie

1. En présence d'incertitude, le prix doit couvrir non seulement le coût marginal mais aussi une prime de risque.
2. De ce fait, le risque diminue la production par rapport à l'univers certain, donc les offres de

redevance de concession.

3. En général, le choix d'une redevance proportionnelle au chiffre d'affaires ou au bénéfice permet au concessionnaire d'offrir davantage, en moyenne, que si la redevance est fixe.

Conclusion générale

1. Sa parfaite détermination et son impact nul ou faible sur la production (selon le degré d'incertitude) tendraient à faire préférer aux redevances proportionnelles la redevance forfaitaire, qui constitue seule un véritable engagement chiffré. Cependant, l'incertitude qui caractérise l'activité économique conduira probablement les candidats à la concession, pour se protéger du risque, à faire des offres plus élevées (en moyenne, compte tenu des aléas) pour des redevances proportionnelles que pour une redevance fixe.
2. Si les considérations précédentes conduisent à retenir une redevance proportionnelle, une redevance sur le bénéfice est en principe préférable à une redevance sur le chiffre d'affaires, car elle n'a pas ses inconvénients quant au niveau de production et au prix. Pour éviter les inconvénients de la redevance sur le bénéfice (risque de dissimulation comptable par les charges calculées, paiement au concédant les seules années profitables), nous recommandons plutôt une redevance assise sur un solde de gestion plus large et incontestable, comme l'excédent brut d'exploitation, assiette qui reste en accord avec les fondements théoriques de la redevance de concession.
3. Si nous retenons une redevance proportionnelle, il est préférable de juger les candidats sur le taux offert, qui constitue un engagement réel, plutôt que sur le montant total, lequel peut être gonflé *ex ante* en manipulant les projections financières de la concession, sur lesquelles les candidats ne sont pas engagés.
4. Une redevance binôme (terme fixe plus terme proportionnel) est un compromis classique entre les points de vue du concessionnaire et du concédant, qui réalise un partage des risques.



BIBLIOGRAPHIE

J. M. Henderson et R. E. Quandt (1993), *Microéconomie*, Dunod, Paris.

L. Eeckhoudt et C. Gollier (1992), *Les risques financiers*, Ediscience, Paris.